Change of Topological Numbers at Finite Temperature

AUTHOR(S):
船久保, 公一

CITATION:
船久保, 公一. Change of Topological Numbers at Finite Temperature. 物性研究 1991, 55(4): 356-362

ISSUE DATE:
1991-01-20

URL:
http://hdl.handle.net/2433/94397

Change of Topological Numbers at Finite Temperature

佐賀大・理工　船久保公一

1. Motivation

ここ2、3年、素粒子論研究者の一部で有限温度における位相不変量の変化の問題が、宇宙のバリオン数の非対称性との関連で議論されている。まず始めに、なぜ物質を構成するバリオンと数学的な位相不変量が関係するのか以下で簡単に解説する。

現在、世代という階層を持つクォークとレプトンの（重力を除く）相互作用は標準模型と呼ばれる、$SU(3)_{\rm color}\otimes SU(2)_{\rm weak}\otimes U(1)_{\rm hypercharge}$ ゲージ理論でよく記述されると考えられている。この理論のうち、以下で特に関係のある $SU(2)$ ゲージ理論の部分を1世代に限って言うと、次の lagrangian で支配されている。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&-\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})+|(\partial_\mu-igA_\mu)\phi|^2-m^2\phi^\dagger\phi-\frac{\lambda}{4}(\phi^\dagger\phi)^2\\&+\bar{q}_L(i\partial\!\!\!/+gA\!\!\!/)q_L+\bar{l}_L(i\partial\!\!\!/+gA\!\!\!/)l_L+\bar{u}_Ri\partial\!\!\!/u_R+\bar{d}_Ri\partial\!\!\!/d_R+\bar{e}_Ri\partial\!\!\!/e_R+\mathcal{L}_Y\end{aligned}$$

ここで $A_\mu=A_\mu^a\tau^a/2$ は $SU(2)$ のゲージ場（τ^a $(a=1,2,3)$ は Pauli matrix）、$F_{\mu\nu}$ はその field strength であり、Higgs scalar $\phi=(\phi^+,\phi^0)$ 、quark $q_L=(u_L,d_L)$ および lepton $l_L=(\nu_L,e_L)$ は $SU(2)$ の doublet 、quark u_R、d_R と lepton e_R は singlet である。フェルミオンの添字はカイラリティを表わす。$\mathcal{L}_Y$ は Higgs と quark や lepton の湯川結合項であるが以下の議論には特に関係はないので略す。これらの場のうち、quark がバリオン数 1/3 を担っている。この lagrangian から明らかなように古典的には（ファインマン図の言葉で言うと tree level では）バリオン数とレプトン数はそれぞれ独立に保存される。（それぞれの $U(1)$ Noether current が保存される。）しかし量子論レベルでは、chiral anomaly[1] のためにカレント保存則は次のようになる。

$$\begin{aligned}&\partial_\mu j^\mu_{B+L}=\frac{N_f}{16\pi^2}\,g^2\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})\\&\partial_\mu j^\mu_{B-L}=0\\&\qquad(\tilde{F}^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma})\end{aligned}$$

（N_f はフェルミオンの世代数。）この Ward-Takahashi identity より直ちに、$A_0=0$ ゲージでは

$$\begin{aligned}B(t)-B(t_0)=&L(t)-L(t_0)\\=&\int_{t_0}^{t}dt'\int d^3x\,\frac{N_f}{32\pi^2}\,g^2\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})\\=&N_{CS}(t)-N_{CS}(t_0)\end{aligned}$$

が得られる。（ B、L はそれぞれバリオン、レプトン数を表わす。）ここで N_{CS} は

$$N_{CS} = \frac{N_f}{32\pi^2} g^2 \int d^3x \, \epsilon_{ijk} \mathrm{Tr}(F_{ij}A_k - \frac{2}{3} g A_i A_j A_k)$$

で定義される Chern-Simons number であり、純ゲージ的配位をとるゲージ場（即ち、$F_{\mu\nu} = 0$ なる A_μ）に対しては整数値をとる位相的な量である。つまりフェルミオンが量子効果のために背景のゲージ場のトポロジーを感じるわけである。このような配位のエネルギーは 0 であるから、古典的にはゲージ・セクターの基底状態（エネルギー最小配位）は Chern-Simons number でラベルされることになる。また、4 次元時空でゲージ群が $SU(2)$（を部分群として含む群）の場合、有限なユークリッド作用（ $S_{\mathrm{instanton}} \propto 1/g^2$）をもつインスタントン解が存在し、$N_{CS}$でラベルされる縮退した真空間の遷移確率が半古典近似で $\exp(-2S_{\mathrm{instanton}})$ で与えられることが知られている。[2] 量子色力学のような強結合理論（ $g \sim O(1)$ ）ではこのトンネル効果により、理論の真空は異なる N_{CS}でラベルされる縮退した基底状態の重ね合わせ（θ 真空）になっていると言われている。一方、電弱理論のような弱結合理論では exp の肩が $O(100)$ となり tunneling はほとんど起こらない。従って、バリオン数は一旦決まるとほとんど変わらないと考えられてきた。

ところが、異なる N_{CS}を持つエネルギー最小配位の間のエネルギーバリアが有限の場合、熱的励起によりこの障壁を越える遷移が起こることは容易に想像できる。標準的な宇宙論模型では、バリオン数の非対称性は、ビッグ・バン後の高温状態 ($T \sim 10^{16}$GeV) で強い相互作用と電弱相互作用が一つの大統一理論 (GUTs) により記述されていたときに、宇宙膨張による非平衡状態や GUTs 自身の CP violation などにより生じたとされている。（ GUTs では $SU(3)_{\mathrm{color}}$の表現であるクォークと $SU(2)_{\mathrm{weak}}$の表現であるレプトンをより大きなゲージ群（例えば $SU(5)$ ）の 1 つの多重項として含むので、重いゲージボソンを介してクォークとレプトンとが入れ替わる過程が tree level で起こり得る。）ところが今述べたような熱的過程でバリオン数が変わり得るとしたら、電弱理論の対称性の破れの回復の相転移温度（$\sim 10^2$GeV）より冷えた状況でもバリオン数が生成あるいは消滅されることになる。特に電弱理論の相転移が 2 次の場合、初期に GUTs process により生成されていたバリオン数の内、$B+L$ は現在までに完全に消滅され、現在のバリオン数は初期の $B-L$ で決ってしまう可能性が指摘された。[3]（上記の Ward-Takahashi identity より $B-L$ は量子論的に保存される。）従って minimal $SU(5)$ GUT のように $B-L$ を保存するような理論では現在のバリオン数非対称性を説明できないことになる。一方、この過程を利用して、GUTs に依らずにバリオン数を生成しようというシナリオもあるなど、この問題の決着には相転移の次数、遷移率と宇宙膨張の時間スケールとの比較、自由エネルギーの構造や膨張宇宙の非平衡的取扱などの問題の解決が必要であると思われる。

2. Transition Rate at Finite Temperature

この節では経路積分による有限温度での遷移確率を求める方法を解説した。要旨のみを述べるが詳しくはRef.4 を参照されたい。位相不変量の変化は縮退した真空間で起こるが以下では準安定状態からの遷移を考える。ここで紹介する方法[5] は Langer が1次の相転移における bubble nucleation rate を計算するのに用いたもので、自由エネルギーをふたつの極小値の間の鞍点の周りで展開し解析接続して得られる虚数部を遷移率と関係させる方法[6] を半古典的にしたものであり、ゼロ温度では Coleman によって準安定状態の tunneling による崩壊率に使われた。[7]

まず初期状態を、ポテンシャルの準安定点の曲率で決まる振動数、ω_0、なる調和振動子の熱平衡状態であるとする。この時の遷移率 Γ を波動関数で与えられる確率流のボルツマン平均で定義する。即ち、

$$\Gamma \equiv \int_0^\infty dE\, \frac{\mathrm{e}^{-\beta E}}{Z_0}\, \rho(E)\Gamma(E).$$

ここで $Z_0 = [2\sinh(\beta\hbar\omega_0/2)]^{-1}$ は初期状態の分配関数、$\rho(E)\Gamma(E)$ は確率流であり、実際にはWKB近似によって得られた波動関数を用いて与えられる。一方、自由エネルギー $F = -T\log\mathrm{Tr}[\mathrm{e}^{-\beta H}]$ を経路積分によって表わしたものを半古典近似で評価し、Langer 流の解析接続を行なうとその虚数部と上で定義した遷移率の間に次の関係が成り立つことが示される。

$$\begin{aligned} T \lesssim \frac{\hbar\omega_-}{2\pi} \quad &: \qquad \Gamma \simeq \frac{2}{\hbar}\,\mathrm{Im}F \\ T \gtrsim \frac{\hbar\omega_-}{2\pi} \quad &: \qquad \Gamma \simeq \frac{\omega_-\beta}{\pi}\,\mathrm{Im}F \end{aligned}$$

ここで ω_- は鞍点の曲率（負モード）で決まる振動数である。経路積分を評価する際、虚数部を与える配位のうち低温で積分を支配する配位は bounce とよばれるユークリッド化された理論の古典解で場の理論でのインスタントンに対応していて、遷移は量子力学的トンネル効果を通して起こることを示唆している。高温では、bounce はもはや古典解にはなり得ず、ポテンシャルの鞍点がきいていて熱的遷移の起こることに対応している。場の理論では、この鞍点に相当する配位は有限の静的エネルギーと唯一の負モードを持った、（ユークリッド）時間についての構造を持たない鞍点解であり、" Sphaleron " と呼ばれている。[8]

3. Example

ある理論で sphaleron 解を見つけたら、遷移率を計算するのは場の理論における経路積分の半古典近似の問題になる。ただし、そのような解が見つかっている場の理論は多くはない。いまのところ、4 次元 $SU(2)$ gauge-scalar system (Ref.9)、2 次元 $U(1)$ gauge-scalar system (Ref.10)、2 次元 $O(3)$ nonlinear sigma model (Ref.11, 12) だけである。これらの理論はそれぞれ、場の変数が与える写像のホモトピー群、$\pi_3(SU(2)) \simeq \pi_3(S^3) \simeq Z$、$\pi_1(U(1)) \simeq \pi_1(S^1) \simeq Z$、$\pi_2(S^2) \simeq Z$ により非自明な真空構造を持つことが知られている。

この節では 2 次元 $O(3)$ nonlinear sigma model を例にとり、高温側での遷移率を前節で説明した自由エネルギーの虚数部から求める方法を適用することで計算した。この際、sphaleron のまわりの fluctuation operator のスペクトルに負モードが一つしかないこと、位相空間の経路積分に集団座標[13] を導入してゼロモードを扱うことによって正しい温度依存性が導出されることなどを示した。[14]

また、ポテンシャル(静的エネルギー汎関数)の 2 つの極小配位を繋ぐ 1 本の道(後で述べる non-contractible loop)を配位空間にとることにより、場の無限大の自由度を 1 自由度にし量子力学的に取り扱うことで低温から高温までの領域で遷移率がどの様に変化することをみることもできる。[15] これによると低温ではインスタントンによる遷移がほとんど起こり得なかった弱結合理論(exp の肩が $O(100)$)でも高温では十分起こること(exp の肩が $O(1) \sim O(10)$)がわかる。

4. Other Methods

ここで扱っている遷移現象は本質的に非平衡過程であるが、今のところ、場の理論にそのまま適用できる方法は前述の自由エネルギーを解析接続するものの他に、筆者の知るのは以下の方法だけである。

- classical stochastic approach[16]

これは位相空間の分布関数 $\rho(q,p;t)$ に対する Fokker-Planck 方程式を現象論的に設定し(温度は各自由度の座標や運動量が変化する確率をボルツマン的にすることで入る。熱浴に浸っていると考える。)、その解からポテンシャルの鞍点を通る定常的な確率流を作りそれを遷移率とみなすやり方である。場の理論に応用するには、まず 4 次元理論なら結合定数や質量が温度依存性をもった 3 次元の有効理論を作り、それを古典場の理論としてこの方法を適用する。[17]

- formal density operator approach[18]

本研究会でも何度か出てきた Zubarev による方法により、retarded Liouville equation の形式解に線形応答近似を用いることでポテンシャルの一方の極小点の近傍に滞在する確率の減少率を求めるものである。Ref.19 により場の理論に応用された。

numerical approach[20,21]

古典的な熱的遷移を数値的にシミュレートするものである。まず、$A_0 = 0$ ゲージ（格子理論で言えば $U_0 = 1$ ゲージ）でのハミルトニアン格子理論を考える。つまり、4次元なら3次元の格子の上に場とその共役運動量を配置する。これらの変数から成るハミルトニアンによりモンテ・カルロ法を用いて古典場の統計集団を生成する。* （古典場の統計力学は Rayleigh–Jeans の紫外発散のために存在しないが、格子定数がその切断の役割をする。）こうして得られた1つ配位を初期条件として、差分化された古典的な運動方程式を数値的に解くことによって各時刻での場の値とそれから計算される Chern-Simons 数を求め、N_{CS}の時間相関から遷移率を評価する。運動方程式から場の時間発展を求める際に、N_{CS}が変化する様子やそのとき場の配位が sphaleron 的になっていることが観測されている。[21]

5. Discussions

今回紹介した方法は一般に有限エネルギーの鞍点解を持つ理論に応用できる。特に最近、低次元の物性系を場の理論で調べる研究が数多く成されているが、豊富な真空構造を持つ（インスタントン配位のある）非線形理論では sphaleron 解が存在する可能性は十分あり、低温と高温での理論の振舞いに違った影響を与えるかも知れない。有限自由度では物性論研究者により散逸のある場合の遷移の問題が調べられており、[22] 散逸の効果まで考えたときこれらの成果を場の理論に応用することも考えるべきであろう。最後に筆者が気になっている話題、問題をいくつか挙げてみようと思う。（勿論これらの他にも宇宙論への影響などあるが、それに関しては勉強不足のため割愛する。）

- 場の理論に応用可能な熱的遷移を扱う方法

現在主に使われているのは、ここで紹介した自由エネルギーを解析接続するものであるが、虚数部の定義など気持ちの悪い部分がある。他に方法はないのか。また、前節で挙げたいくつかの方法でも、近似を行なう際のエッセンシャルな点はポテンシャルの鞍点の負モードが唯一つしかないということであった。このために遷移率が、鞍点の高さとそこでの曲率で決ってしまうという結果が得られた。複雑な理論ではこの負モードの数が必ずしも1つであるとは限らない。実際空間のトポロジーに依っては、負モードを複数個持った有限エネルギー解が生じる例もある。[12] 負モードが2個以上ある場合、配位空間の内その負モードの方向のみを取り出してみるとその解はエネルギー汎関数の局所極大になっているので、遷移率は鞍点の高さで決まるボルツマン因子に比例するのでなくポテンシャルの大局的構造に依存すると考えられる。

- 鞍点解の存在条件

一般に有限エネルギーの鞍点解の存在を言える十分条件はないが、存在のためのいくつかの criteria はないであろうか。多様体上の滑らかな関数の極大極小を論じるモース理論によると、コンパクトな多様体の場合には関数の最小値を通り1点に縮約できないループ（noncontractible loop）の存在とその関数の鞍点の存在とが関係付けられている。[9] 今の場合、この多様体とは場の配位空間のことで、多様体上の関

* 異なる N_{CS} のエネルギー極小値が縮退している場合、十分長時間たつと $\langle N_{CS}\rangle = 0$ なる平衡状態になるが、実際の数値計算では変数の変化幅をある程度制限することによって1つの極小値の周りで揺らいでいる状態を生成する。

数とはエネルギー汎関数のことである。この配位空間は一般に無限次元非コンパクトであるからループの存在が即鞍点のそれにはならないが、特殊な場合には鞍点の存在が言えるし、[23] 一般に鞍点存在のための必要条件であると考えられる。この noncontractible loop 或はその高次元版の存在はホモトピー群により予測することが出来る。[9,24] また次元解析から当然のことではあるが、QCD のように lagrangian に mass scale のない理論には、有限エネルギーの古典解は存在しない。

- 現実的な標準模型での問題

4次元 $SU(2)\otimes U(1)$ gauge-Higgs system で、まず鞍点解が存在するのか。存在した場合、その鞍点解の周りの fluctuation のスペクトルはどうなっているか。負モードの個数や正モードの寄与（entropy factor といわれ、正モードの自由度がどの程度励起されるかの目安を与え、これが大きいとポテンシャルバリアを越すに要するエネルギーがこれらの自由度に消費されてしまい遷移が抑制される。）はどうか。（4次元 $SU(2)$ gauge Higgs system では entropy suppression が無いといわれている。[25]）またゲージ対称性回復の相転移の次数、N_{CS}に対する自由エネルギーの構造などはバリオン数の生成、消滅に直接関わってくる。

- 数値シミュレーションの可能性

これまでに挙げた問題は前節の数値的方法で解決されるかも知れない。つまり実際にシミュレーションしてみて有限の遷移が観測されれば、鞍点解の有無、負モードの数など知らなくても良いという実験的立場である。遷移率が exponential fit 出来れば、sphaleron による遷移の可能性もあるが、現実的な模型で実際に遷移が起こるかをまず数値実験で調べてみるというアプローチも今後検討されるべきであろう。

REFERENCES

1. For a review, see, R.Jackiw, Les Houches lecture in ‘Current Algebra and Anomalies’ ed. by S.B.Treiman, et al.(World Scientific, 1985).
2. G.’t Hooft, Phys.Rev.Lett.**37**, 8 (1976);
   R.Jackiw and C.Rebbi, Phys.Rev.Lett.**36**, 1119 (1976);
   for a review, see, S.Coleman, *The Uses of Instantons* in ‘Aspects of Symmetry’ (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
3. V.A.Kuzmin, V.A.Rubakov and M.E.Shaposhnikov, Phys.Lett.**155B**, 36 (1985); *ibid.***B191**, 171 (1987).
4. K.Funakubo, 素粒子論研究, Vol.79, No.6 (1989):「QCD でのクォークの閉じこめ」研究会報告
5. I.Affleck, Phys.Rev.Lett.**46**, 388 (1981).
6. J.S.Langer, Ann.Phys.**41**, 108 (1967).

7. C.G.Callan Jr. and S.Coleman, Phys.Rev.**D16**, 1762 (1977).

8. F.R.Klinkhamer and N.S.Manton, Phys.Rev.**D30**, 2212 (1984).

9. N.S.Manton, Phys.Rev.**D28**, 2019 (1983).

10. A.I.Bochkarev and M.E.Shaposhnikov, Mod.Phys.Lett.**A2**, 991 (1987).

11. E.Mottora and A.Wipf, Phys.Rev.**D39**, 588 (1989).

12. K.Funakubo, S.Otsuki and F.Toyoda, Prog.Theor.Phys.**83**, 118 (1990).

13. J.-L.Gervais and B.Sakita, Phys.Rev.**D11**, 2943 (1975);
N.Christ and T.D.Lee, *ibid.***D12**, 1606 (1975);
E.Tomboulis, *ibid.***D12**, 1678 (1975).

14. K.Funakubo, Prog.Theor.Phys.**83**, 286 (1990).

15. H.Aoyama, H.Goldberg and Z.Ryzak, Phys.Rev.Lett.**60**, 1902 (1988).

16. J.S.Langer, Ann.Phys.**54**, 258 (1969).

17. A.Ringwald, Phys.Lett.**B201**, 510 (1988).

18. D.N.Zubarev, 'Nonequilibrium Statistical Thermodynamics'(Nauka, 1971).

19. S.Yu.Khlebnikov and M.E.Shaposhnikov, Nucl.Phys.**B308**, 885 (1988).

20. D.Yu.Grigoriev and V.A.Rubakov, Nucl.Phys.**B299**, 67 (1988);
J.Ambjørn, M.L.Laursen and M.E.Shaposhnikov, Nucl.Phys.**B326**, 483 (1989).

21. D.Yu.Grigoriev, V.A.Rubakov and M.E.Shaposhnikov, Phys.Lett.**B216**, 172 (1989).

22. For example, A.O.Caldeira and A.J.Leggett, Ann.Phys.**149**, 374 (1983).

23. C.H.Taubes, Comm.Math.Phys.**86**, 257, 299 (1982).

24. P.Forgács and Z.Horváth, Phys.Lett.**138B**, 397 (1984);
K.Fujii, S.Otsuki and F.Toyoda, Prog.Theor.Phys.**81**, 462 (1989).

25. T.Akiba, H.Kikuchi and T.Yanagida, Phys.Rev.**D40**, 588 (1989).